Abschätzung der Reproduktionszahl *R*

Christoph Neumann/Jochen Meyer-Hilberg

Ulm

17. Januar 2021

Definition der Reproduktionszahl *R*

Aus **„Schätzung der aktuellen Entwicklung der SARS-CoV-2-Epidemie in Deutschland — Nowcasting“** vom RKI*:

Schätzung der Reproduktionszahl *R*:

...

Die Reproduktionszahl ist die Anzahl der Personen, die im Durchschnitt von einem Indexfall angesteckt werden.

...

Die Generationszeit ... entspricht etwa dem seriellen Intervall, dass die mittlere Dauer zwischen dem Erkrankungsbeginn eines Falles und dem Erkrankungsbeginn seiner Folgefälle angibt. Diese Zeitspanne schätzen wir auf etwa 4 Tage, ...

*RKI $\widehat{=}$ **R**obert **K**och-**I**nstitut (`https://www.rki.de/`)

Definition der Reproduktionszahl R

Symbol	Bedeutung
t	Nummer des Tages
R	Reproduktionszahl bei einer Generationszeit von 4 Tagen
$\Delta N(0)$	Anzahl mit dem Corona-Virus Neuinfizierter am Tag 0
$\Delta N(t)$	Anzahl mit dem Corona-Virus Neuinfizierter am Tag t

$$\Delta N(t) = \Delta N(0) \cdot R^{\frac{t}{4}}.$$

Beispiel für die Reproduktionszahl R

t	$\Delta N(t)/\Delta N(0) = R^{\frac{t}{4}}$ mit z. B. $R = 0{,}8$
Tag 0	1,00000
Tag 1	0,94574
Tag 2	0,89443
Tag 3	0,84590
Tag 4	0,80000
Tag 5	0,75659
Tag 6	0,71554
Tag 7	0,67672
Tag 8	0,64000
Tag 9	0,60527
Tag 10	0,57243

Abschätzung der Reproduktionszahl R gemäß RKI

Vereinfachung: Hier wird angenommen, daß die Reproduktionszahl R sich über der Zeit nicht ändert. In Wirklichkeit ist R aber „verrauscht“.

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= \frac{\sum_{t=4}^{7} \Delta N(t)}{\sum_{t=0}^{3} \Delta N(t)} = \frac{\Delta N(0) \cdot \sum_{t=4}^{7} R^{\frac{t}{4}}}{\Delta N(0) \cdot \sum_{t=0}^{3} R^{\frac{t}{4}}} \\
&= \frac{R^{\frac{4}{4}} + R^{\frac{5}{4}} + R^{\frac{6}{4}} + R^{\frac{7}{4}}}{R^{\frac{0}{4}} + R^{\frac{1}{4}} + R^{\frac{2}{4}} + R^{\frac{3}{4}}} \\
&= R^{\frac{4}{4}} \cdot \frac{R^{\frac{0}{4}} + R^{\frac{1}{4}} + R^{\frac{2}{4}} + R^{\frac{3}{4}}}{R^{\frac{0}{4}} + R^{\frac{1}{4}} + R^{\frac{2}{4}} + R^{\frac{3}{4}}} = R.
\end{aligned}$$

Nachteil: Bei der Mittelung über jeweils 4 Tage kommt es zu starken Oszillationen wegen des „Wochenend-Effekts“.

Verbesserte Abschätzung der Reproduktionszahl R

Verbesserte Methode: Den „Wochenend-Effekt“ kann man kompensieren, indem man nicht über jeweils 4 Tage, sondern über jeweils 7 Tage mittelt.

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= \frac{\sum_{t=4}^{10} \Delta N(t)}{\sum_{t=0}^{6} \Delta N(t)} = \frac{\Delta N(0) \cdot \sum_{t=4}^{10} R^{\frac{t}{4}}}{\Delta N(0) \cdot \sum_{t=0}^{6} R^{\frac{t}{4}}} \\
&= \frac{R^{\frac{4}{4}} + R^{\frac{5}{4}} + R^{\frac{6}{4}} + R^{\frac{7}{4}} + R^{\frac{8}{4}} + R^{\frac{9}{4}} + R^{\frac{10}{4}}}{R^{\frac{0}{4}} + R^{\frac{1}{4}} + R^{\frac{2}{4}} + R^{\frac{3}{4}} + R^{\frac{4}{4}} + R^{\frac{5}{4}} + R^{\frac{6}{4}}} \\
&= R^{\frac{4}{4}} \cdot \frac{R^{\frac{0}{4}} + R^{\frac{1}{4}} + R^{\frac{2}{4}} + R^{\frac{3}{4}} + R^{\frac{4}{4}} + R^{\frac{5}{4}} + R^{\frac{6}{4}}}{R^{\frac{0}{4}} + R^{\frac{1}{4}} + R^{\frac{2}{4}} + R^{\frac{3}{4}} + R^{\frac{4}{4}} + R^{\frac{5}{4}} + R^{\frac{6}{4}}} = R.
\end{aligned}$$